数理解析研究所講究録
第2075巻 2018年 147-157

ENHANCED ADJOINT ACTION AND ITS QUOTIENTS

東京電機大学・工　太田 琢也　　青山学院大学・理工　西山 享

Takuya Ohta
Depertment of Mathematics
Tokyo Denki University
ohta@cck.dendai.ac.jp

Kyo Nishiyama
Department of Physics & Mathematics
Aoyama Gakuin University
kyo@gem.aoyama.ac.jp

ABSTRACT. We defined an enhanced adjoint action of the general linear group on a direct sum of adjoint representation and a several copy of defining representations and its duals. We studied the structure of the quotient space and invariant rings. As a consequence, we can determine regular semisimple orbits (i.e., closed orbits of maximal dimension) and discuss some properties of enhanced nilpotent variety, in particular, its irreducible components, resolution of singularities and their dimensions.

INTRODUCTION

G を複素数体 $\mathbb{C}$ 上の簡約代数群とし，$\mathfrak{g}$ をそのリー環とする．G は $\mathfrak{g}$ に随伴作用で働くが，この作用の幾何学的な性質については，代数幾何学，不変式論，シンプレクティック幾何などの観点からさまざまな研究がなされてきた．

たとえば，$\mathfrak{g}$ 上の多項式環 $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]$ を考えたとき，その不変式環 $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G$ は多項式環になり，$r = \operatorname{rank} G$ 個の代数的独立な生成元 $f_1, \dots f_r$ を持つ．この不変式環の生成元を用いて，随伴商の写像が具体的に

$$\begin{array}{cccc} \pi : & \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathbb{C}^r \simeq \mathfrak{g}/\!/ \operatorname{Ad} G \\ & \Psi & & \Psi \\ & x & \longmapsto & (f_i(x))_{i=1}^r \end{array}$$

と与えられる．この商写像について，次の事実が成り立つ[1]．

定理 0.1. (1) 任意の $v \in \mathbb{C}^r$ に対して，そのファイバー $\pi^{-1}(v)$ はただ一つの閉軌道 $\mathcal{O}(v)$ を含む．$\mathcal{O}(v)$ は半単純元 $h \in \mathfrak{g}_{ss}$ を通る軌道であって，$\mathcal{O}(v) = G \cdot h$ と書ける．こ

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 14L30; Secondary 15A72, 14D25.

Key words and phrases. enhanced nilpotent cone, exotic nilpotent cone, adjoint quotient, classical invariant theory.

K. N. is partially supported by JSPS KAKENHI Grant Number #16K05070.

[1] この定理については，例えば，[堀 16] や [太西 15]（とそこで挙げられている文献群）を参照して欲しい．また [CM93] にも簡潔な解説がある．

の対応により下記の3つの集合の間の自然な全単射対応が得られる.

$$\begin{array}{ccccc} \{\text{半単純軌道} \subset \mathfrak{g}\} & = & \{\text{閉軌道} \subset \mathfrak{g}\} & \xleftrightarrow{\text{全単射}} & \mathbb{C}^r \\ \Psi & & \Psi & & \Psi \\ G \cdot h \ (h \in \mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}) & = & \mathcal{O}(v) & \longleftrightarrow & v \end{array}$$

(2) 零ファイバー $\pi^{-1}(0)$ は $\mathfrak{g}$ の冪零元の全体がなす多様体（冪零多様体）に一致する. つまり

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{g}) = \pi^{-1}(0) = \{x \in \mathfrak{g} \mid f_i(x) = 0 \ (1 \leq i \leq r)\}$$

であって，不変イデアル $J = (f_1, \ldots, f_r)$ は素イデアルである. また，冪零軌道 $\mathfrak{N}(\mathfrak{g})/\operatorname{Ad} G$ は有限個であり，ルート系を用いて分類できる[2].

(3) 一般の $v \in \mathbb{C}^r$ に対して，$\mathcal{O}(v) = G \cdot h \ (h \in \mathfrak{g}_{\mathrm{ss}})$ をファイバー $\pi^{-1}(v)$ に含まれるただ一つの閉軌道，$\mathfrak{g}_h = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(h), G_h = Z_G(h)$ をそれぞれ中心化環，中心化群とすると，$\pi^{-1}(v)/\operatorname{Ad} G \simeq \mathfrak{N}(\mathfrak{g}_h)/\operatorname{Ad} G_h$ が成り立つ[3]. したがって，各ファイバー $\pi^{-1}(v)$ は有限個の随伴軌道からなり，そのうち開かつ稠密なものを $\mathcal{O}^{\mathrm{reg}}(v)$ と書くと，$\dim \mathcal{O}^{\mathrm{reg}}(v) = \dim G - \operatorname{rank} G$ である. 特に，ファイバーはすべて既約，その次元はすべて等しい.

(4) 一般の随伴軌道 $\mathcal{O}_x = G \cdot x \ (x \in \mathfrak{g})$ に対して，$\pi(\mathcal{O}_x) = v$ とおく. このとき (3) の記号の下に，ある冪零軌道 $\widetilde{\mathcal{O}} \in \mathfrak{N}(\mathfrak{g}_h)/\operatorname{Ad} G_h$ が存在して，軌道 $\mathcal{O}_x$ は $G/G_h \simeq \mathcal{O}(v)$ 上の主ファイバー束に分解する.

$$\mathcal{O}_x \simeq G \times_{G_h} \widetilde{\mathcal{O}} \longrightarrow G/G_h \simeq \mathcal{O}(v)$$

ここに挙げた随伴商の特徴的な性質は，その性質のうちのほんの一部ではあるが，興味深い. なかでも冪零多様体 $\mathfrak{N}(\mathfrak{g})$ はもっとも魅力ある対象である. 冪零軌道まで話を広げて，その例を挙げると，次のようなものが想起される.

- 冪零軌道の閉包の特異点の解析，特異点解消，正規性など.
- シンプレクティック多様体としての構造やシンプレクティック特異点解消.
- 半単純軌道の変形としての冪零軌道，漸近錐の理論.
- Springer-Steinberg の理論，Robinson-Schensted 対応やその一般化を含む組合せ論的な話題.
- 冪零軌道の量子化とユニポテント表現の構成，分類.

まだまだ多くの話題がありそうだが，随伴商がかなり豊富な数学的対象であることを感じていただけると思う.

[2] もう少し詳しく述べると，重み付きの Dynkin 図形によって分類される（Dynkin-Kostant）. また Bala-Carter による distinguished な放物型部分環を用いた分類，さらに，$\mathfrak{g}$ が古典型の時には，ジョルダン標準形（しばしばヤング図形を用いて表記される）による分類も知られている. これらの分類については [CM93] に詳しい.

[3] $\mathfrak{g}_h$ はまた簡約リー環になる.

さて，この報告では，随伴商そのものではなく，その一般化について考える．目標は，随伴商を一般化して，定理 0.1 のようなよい状況をもつ幾何学を作り出すこと，そして，それを利用した不変式論や表現論・組合せ論への応用である．現段階では，$\mathfrak{g}$ は一般線型リー環の場合しか扱えておらず，まだまだ応用までは辿り着いていないが，ある程度の道筋は見えてきたと思うので，それをご報告したい．

具体的には，$\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ の随伴表現を一般化し，その不変式環について述べる．それを利用して，一般化された随伴表現の商多様体の代数幾何的構造と，正則な軌道（最大次元の軌道）について調べ，冪零多様体の既約成分とその特異点解消を記述する．

なお，本報告の証明を含む詳細は別に発表する予定である．詳しくは，英文のプレプリント [NO17] を参照して欲しい．

1. 拡張随伴表現とその不変式

以下，$G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ を一般線型群，$\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ をそのリー環とし，$V = \mathbb{C}^n$ とおく．必要に応じて，$G = \mathrm{GL}(V), \mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(V)$ などと書いたりする．

さて，G の随伴表現 $(\mathrm{Ad}, \mathfrak{g})$ を一般化して，拡張随伴表現 (enhanced adjoint representation/action) を次のように定義しよう．$p, q \geq 1$ に対して，

$$W = \mathrm{M}_n \oplus \mathrm{M}_{n,p} \oplus \mathrm{M}_{q,n} \ni (A, B, C)$$

$$g \cdot (A, B, C) = (gAg^{-1}, gB, Cg^{-1}) \quad (g \in G).$$

これは自然表現 V とその双対表現 V^* を用いると，

$$W \simeq V^{\oplus p} \oplus (V \otimes V^*) \oplus (V^*)^{\oplus q} = V^{\oplus p} \oplus \mathfrak{gl}(V) \oplus (V^*)^{\oplus q}$$

と書くこともできる．このように書いてみると，W は随伴表現の一般化と言うだけでなく，Weyl の不変式論 [Wey39] の設定である $\mathrm{GL}(V)$ の $V^{\oplus p} \oplus (V^*)^{\oplus q}$ への作用の一般化になっていることが了解されるだろう．[4]

まず，この拡張随伴作用に関する不変式の構成から話を始めよう．それには Le Bruyn-Procesi の結果を用いることができる [LBP90, § 3, Theorem 1] ([LBP87], [Ito13] も参照のこと). 彼らの結果は箙 (quiver) の表現とその不変式に関するもので，非常に一般的かつ強力である．

Q を箙とし，Q_0 を頂点集合，Q_1 を辺の集合，辺 $e \in Q_1$ に対して，$h(e) \in Q_0$ によって始点 (head)，$t(e) \in Q_0$ によって終点 (tail) を表す．$\alpha : Q_0 \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を次元ベクトルとし，頂点 $k \in Q_0$ ごとに有限次元ベクトル空間 $V_k = \mathbb{C}^{\alpha(k)}$ を対応させる．つまり，その次元を集めたものが次元ベクトルである．箙の表現を $R(Q, \alpha) = \bigoplus_{e \in Q_1} \mathrm{Hom}(V_{h(e)}, V_{t(e)})$ と書くと，この表現空間には $\mathrm{GL}(\alpha) = \prod_{k \in Q_0} \mathrm{GL}(V_k)$ が自然に作用している．

[4]もちろん，随伴表現の部分をふくらませて $V^{\oplus p} \oplus (V \otimes V^*)^{\oplus r} \oplus (V^*)^{\oplus q}$ を考えてみるのも大変興味深いのだが，これは将来の課題としたい．Weyl はすべての古典群に対して，その自然表現を考えたが，拡張随伴表現もすべての単純リー群に対して，その基本表現（のうち最小次元のもの）を取り，同様に定義することができるであろう．このような拡張随伴表現も興味深い対象ではないかと思う．

さて，$f \in R(Q,\alpha)$ と箙のループ $L=(e_1,e_2,\ldots,e_m)$ に対して，表現 f の L に沿った合成

$$f(L) := f_{e_m} \circ \cdots \circ f_{e_2} \circ f_{e_1} \in \mathrm{End}(V_{h(e_1)})$$

を考えると，このトレース $\operatorname{trace} f(L)$ は $f \in R(Q,\alpha)$ の多項式と考えると，明らかに $\mathrm{GL}(\alpha)$ 不変であるが，実は次の定理が成り立つ．

定理 1.1 ([LBP90, Theorem 1])**.** 不変式環 $\mathbb{C}[R(Q,\alpha)]^{\mathrm{GL}(\alpha)}$ は箙 Q におけるループのトレース

$$\{\operatorname{trace} f(L) \mid L \text{ は } Q \text{ のループ}\}$$

によって代数として生成される．

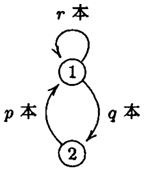
これを我々の拡張随伴表現に用いるのだが，定理 1.1 の設定はまったく一般的なので，随伴表現の部分が一つだけでなく，r 個のコピーに増やしても同じことになる．そこで，しばらくの間，随伴表現 $\mathfrak{gl}(V)^{\oplus r}$ の拡張を考えることにしよう．

まず，箙 Q としては，頂点集合が $Q_0=\{1,2\}$ であって，辺が

$$Q_1 = \{a_i \mid 1 \le i \le r\} \cup \{b_i \mid 1 \le i \le p\} \cup \{c_i \mid 1 \le i \le q\},$$

であるものを考える．ここで，a_i $(1 \le i \le r)$ は 1 から出て 1 に戻る r 本のループ，つまり $h(a_i)=t(a_i)=1$ となるもので，b_i $(1 \le i \le p)$ は 2 から 1 へ向かう p 本の辺 $(h(b_i)=2$, $t(b_i)=1)$，同様に c_i $(1 \le i \le q)$ は 1 から 2 へ向かう q 本の辺 $(h(c_i)=1$, $t(c_i)=2)$ である（下図参照）．

箙 Q :



また，次元ベクトルを $\alpha=(\alpha(1),\alpha(2))=(n,1)$ と選ぶ．つまり，$V_1=\mathbb{C}^n$，$V_2=\mathbb{C}$ で，$\mathrm{GL}(\alpha)=\mathrm{GL}_n\times\mathrm{GL}_1=\mathrm{GL}_n\times\mathbb{C}^\times$ である．すると $(V=V_1=\mathbb{C}^n$ とおいて$)$

$$\begin{aligned} W = W(p,q;r) &:= V^{\oplus p} \oplus (V\otimes V^*)^{\oplus r} \oplus (V^*)^{\oplus q} \\ &= \mathrm{Hom}(\mathbb{C},V)^{\oplus p} \oplus \mathrm{Hom}(V,V)^{\oplus r} \oplus \mathrm{Hom}(V,\mathbb{C})^{\oplus q} = R(Q,\alpha) \end{aligned}$$

のように箙の表現空間と W は同一視できる．$\mathrm{GL}(\alpha)$ には余分な GL_1 の項があるが，これは GL_n の中心の作用と一致しており，不変式を考えるときには悪さをしない．そこで，すべてのループを考えると，頂点ごとに 2 種類のループが存在する．しかし，頂点 2 を始点・終点に持つループでは，$V_2=\mathbb{C}$ が一次元であることから，ここでトレースをとっても，トレースを取らないで線型写像のまま考えても結果は同じである．以上のことを勘案すると，上の定理 1.1 より，我々の拡張随伴表現に関する不変式環 $\mathbb{C}[W]^{\mathrm{GL}_n}$ の生成元が得られる．

生成元を具体的に書くために，すこし記号を準備する．そこで，もう一度 $W = W(p,q;r)$ をベクトルと行列を用いて書き直しておくと

$$W = (\mathbb{C}^n)^{\oplus p} \oplus (\mathbb{C}^{*n})^{\oplus q} \oplus (\mathrm{M}_n)^{\oplus r} = \mathrm{M}_{n,p} \oplus \mathrm{M}_{q,n} \oplus \mathrm{M}_n^r$$

であって，$g \in G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の作用は $(B, C, (A_1, \ldots, A_r)) \in \mathrm{M}_{n,p} \oplus \mathrm{M}_{q,n} \oplus \mathrm{M}_n^r$ に対して，

$$g \cdot (B, C, (A_1, \ldots, A_r)) = (gB, Cg^{-1}, (\mathrm{Ad}(g)A_i)_{i=1}^r).$$

で与えられる．もちろん $\mathrm{Ad}(g)A = gAg^{-1}$ である．

多重指数 $I = (i_1, i_2, \ldots, i_\ell)$ $(1 \le i_k \le r)$ に対して，$A_I = A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_\ell}$ (ℓ 個の行列の積) とおく．$[r] = \{1, 2, \ldots, r\}$ と書いておくと，多重指数全体の集合は $[r]^\ell$ である．以上の記号の元に，

$$\tau_I := \mathrm{trace}(A_I) \qquad (I \in [r]^\ell),$$
$$\gamma_{i,j}^K := (CA_KB)_{i,j} \qquad (K \in [r]^\ell, 1 \le i \le q, 1 \le j \le p)$$

とおく．ここで，$\ell = 0$ も許すことにするが，このときは，$[r]^0 = \{\emptyset\}$ であり，$A_\emptyset = 1_n$ (単位行列) と規約する．

定理 1.2. 不変式環 $\mathbb{C}[W]^{\mathrm{GL}_n}$ は $\{\tau_I, \gamma_{i,j}^K \mid I, K \in [r]^\ell\ (\ell \ge 0), i \in [q], j \in [p]\}$ によって代数として生成される．つまり，

$$\mathbb{C}[W]^G = \mathbb{C}[\tau_I, \gamma_{i,j}^K \mid I, K \in [r]^\ell\ (\ell \ge 0), i \in [q], j \in [p]].$$

が成り立つ．

これは不変式環の第一基本定理 (FFT) にあたるが，生成元の間の関係式を記述する第二基本定理 (SFT) は，現在のところ $p = q = r = 1$ のときのみ分かっている (後述).

2. 拡張随伴商

以下では，$r = 1$ の場合，つまり

$$W = \mathrm{M}_{n,p} \oplus \mathrm{M}_{q,n} \oplus \mathrm{M}_n \curvearrowleft G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$

のときを考える[5]．

定理 1.2 によって不変式環 $\mathbb{C}[W]^G$ の生成元は分かっているが，記号を簡略化して，

$$\tau_k := \mathrm{trace}(A^k) \qquad (1 \le k \le n), \tag{2.1}$$
$$\gamma_{i,j}^\ell := (CA^\ell B)_{i,j} \qquad (0 \le \ell \le n-1,\ 1 \le i \le q,\ 1 \le j \le p). \tag{2.2}$$

[5] $r > 1$ のときも興味深いが，難度が高く，まだまだ準備不足である．たとえば $p = q = 0$ のときは，[Pro76], [Sch14] などを参照して欲しい．

と書く．Cayley-Hamilton の公式によって，τ_k や $\gamma_{i,j}^{\ell}$ における A の n 次以上の冪は必要がないことに注意しよう．これらの不変式を用いて，アフィン商写像 π_W を

$$\begin{array}{rcl} \pi_W : W & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \oplus (\mathrm{M}_{q,p})^n \\ (A,B,C) & \longmapsto & \Big((\tau_k)_{k=1}^n ; \big((\gamma_{i,j}^{\ell})_{i,j}\big)_{\ell=0}^{n-1}\Big) = \big((\tau_k)_{k=1}^n ; (CA^{\ell}B)_{\ell=0}^{n-1}\big) \end{array} \tag{2.3}$$

と定義する．$\Gamma^{(\ell)} := CA^{\ell}B = (\gamma_{i,j}^{\ell})_{i,j}$ は第 (i,j) 成分が $\gamma_{i,j}^{\ell}$ であるような $q \times p$ 行列を表している．

これらの不変式は $\mathbb{C}[W]^G$ の生成元であるから，商写像の一般論より，像 $\mathrm{Im}\,\pi_W \simeq W/\!/G$ は $\mathbb{C}^n \oplus (\mathrm{M}_{q,p})^n$ の閉部分多様体になっており，$\pi_W : W \to \mathrm{Im}\,\pi_W$ は圏論的商である (たとえば，[太西 15, 定理 4.12] 参照)．

さて，階数が r の行列式多様体 (determinantal variety) を $\mathrm{Det}_r(\mathrm{M}_{q,p}) := \{z \in \mathrm{M}_{q,p} \mid \mathrm{rank}\, z \le r\}$ で定義すると，明らかに $\mathrm{Im}\,\pi_W$ は $\mathbb{C}^n \times \mathrm{Det}_m(\mathrm{M}_{q,p})^n$ $(m = \min\{p,q,n\})$ の閉部分多様体である．

定理 2.1. 上の設定の元に，$m = \min\{p,q,n\}$ とおくと，商写像の像 $\mathrm{Im}\,\pi_W \subset \mathbb{C}^n \times \mathrm{Det}_m(\mathrm{M}_{q,p})^n$ は，圏論的商 $W/\!/G = \mathrm{Spec}\,(\mathbb{C}[W]^G)$ に同型である．

さらに，支配射 (dominant map)

$$\Psi : \mathbb{C}^n \times (\mathrm{Det}_1(\mathrm{M}_{q,p}))^n \to \mathrm{Im}\,\pi_W$$

が存在して，Ψ は，$\mathbb{C}^n \times (\mathrm{Det}_1(\mathrm{M}_{q,p}))^n$ のある開かつ稠密な部分多様体から $\mathrm{Im}\,\pi_W$ の開集合への，対称群 S_n の対角的な作用による商写像になる．とくに，

$$\dim W/\!/G = \dim \mathrm{Im}\,\pi_W = n(p+q)$$

であって，π_W の一般ファイバーの次元は n^2 である．

この定理の主張 $W/\!/G \overset{\sim}{\dashrightarrow} \big(\mathbb{C}^n \times (\mathrm{Det}_1(\mathrm{M}_{q,p}))^n\big)/S_n$ (双有理同型) の部分は，ミスプリではなく，Det_1 でよい．

支配的写像 Ψ を定義しておこう．$t = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{C}^n$ に対して，$P_k(t) := \sum_{i=1}^n t_i^k$ を冪和とし，さらに $X = (X^{(1)}, \ldots, X^{(n)}) \in \big(\mathrm{Det}_1(\mathrm{M}_{q,p})\big)^n$ に対して，$V_k(t,X) := \sum_{i=1}^n t_i^k X^{(i)} \in \mathrm{M}_{q,p}$ とおく．このとき，$V_k(t,X) \in \mathrm{Det}_m(\mathrm{M}_{q,p})$ が分かるので，Ψ を

$$\Psi(t,X) = (P_1(t), \ldots, P_n(t); V_0(t,X), \ldots, V_{n-1}(t,X)) \in \mathbb{C}^n \times \big(\mathrm{Det}_m(\mathrm{M}_{q,p})\big)^n$$

と決める．この写像が S_n の対角的な成分の入れ替えによって不変であることは明らかであるが，$\mathrm{Im}\,\Psi \subset \mathrm{Im}\,\pi_W$ であることが示される．より詳しくは原論文 [NO17] を参照して欲しい．

さて，一般の p,q ではなく，$p = q = 1$ の時には商 $W/\!/G$ は大変「よい」ことが示される．それをまとめておこう．

定理 2.2. 上の設定の元に，$p = q = 1$ とする．このとき，生成元 $\{\tau_k \mid 1 \le k \le n\} \cup \{\gamma_{i,j}^{\ell} \mid 0 \le \ell \le n-1,\ 1 \le i \le q,\ 1 \le j \le p\}$ は代数的に独立であり，不変式環 $\mathbb{C}[W]^G$ は多項式環である．したがって，商写像 π_W は全射であって，

$$W/\!/G \simeq \operatorname{Im} \pi_W = \mathbb{C}^n \oplus (\mathrm{M}_{q,p})^{\oplus n}$$

はアフィン空間に同型である．つまり，商写像 π_W は余正則 (coregular) である．

また，商写像のファイバー $\pi_W^{-1}(v)$ はすべて等次元で，$\dim \pi_W^{-1}(v) = n^2$ である．ファイバーは既約とは限らないが，一般ファイバーはただ一つの閉 G 軌道で，G と同型である．

不変式環 $\mathbb{C}[W]^G$ は多項式環であるが，G が単純の時，このような作用はすべて分類されている ([Sch78])．しかし，この定理の $G = \mathrm{GL}(V)$ は簡約ではあるが，単純ではないので，[Sch78] の分類表には現れない．また，$\mathrm{GL}(V)$ の代わりに $G' = \mathrm{SL}(V)$ を考えると $\mathbb{C}[W]^{G'}$ はもはや多項式環ではない．実際，$(v, A, u) \in V \oplus \mathfrak{gl}(V) \oplus V^*$ に対して，

$$D_1(v, A, u) = \det \begin{pmatrix} u \\ uA \\ \vdots \\ uA^{n-1} \end{pmatrix}, \qquad D_2(v, A, u) = \det(v, Av, \ldots, A^{n-1}v)$$

とおくとこれらは明らかに G' の不変式であるが，不変式の間に代数的な関係式

$$D_1 D_2 = \det(uA^{i+j}v)_{0 \le i,j \le n-1} = \det(\gamma^{i+j})_{0 \le i,j \le n-1}$$

が存在する．

3. 拡張冪零多様体

前節のように，拡張随伴作用

$$W = \mathrm{M}_{n,p} \oplus \mathrm{M}_{q,n} \oplus \mathrm{M}_n \curvearrowleft G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$

を考え，その商を $\pi_W : W \to W/\!/G$ とする．

商多様体 $W/\!/G$ の各点は W の閉軌道と (集合論的に) 一対一に対応している．もっと詳しく言えば，各 $v \in W/\!/G$ に対して，そのファイバー $\pi_W^{-1}(v)$ はただ一つの G の閉軌道を含んでいる．随伴表現の時には，閉軌道は半単純元 (対角化可能な行列) に対応していたことに注意しよう．拡張随伴表現のときも，一般の軌道は閉軌道であるが，それは G と同型であって，とくに n^2 次元である．

一方，このような閉軌道と対極にあるのが冪零軌道である．$w \in W$ が冪零元であるとは，w を通る G 軌道 $\mathbb{O}(w)$ の閉包が 0 を含むときに言い，冪零軌道の全体 $\mathfrak{N}(W)$ を拡張冪零多様体 (enhanced nilpotent variety) と呼ぶ．冪零軌道の一般論から，$\mathfrak{N}(W) = \pi_W^{-1}(\pi_W(0))$ は 0 のファイバー（零ファイバー）であることがわかり，しばしば，零錐 (null cone) とも呼ばれる．零錐はファイバーの中で最も性質(たち)の悪いファイバーで，次元は最大，また，零錐に含まれる軌道（つまり冪零軌道）が有限であれば，他のファイバーもすべて有限

個の軌道を含むなど，零錐の解析は商写像の理解には必須である (例えば [太西15, § 12] 参照).

さて，拡張冪零多様体の場合は，残念ながら既約でなく，冪零軌道も無限にある．この節では，冪零多様体を既約分解し，各既約成分の特異点解消を与えよう．まず，少しだけ一般論を準備する．

3.1. **Hilbert-Mumford の基準を用いた冪零錐の記述.** この小節では [KW06] に基づいて，冪零錐とその既約成分について述べる．また，[Pop03] も参照して欲しい．

そこで，前節までの記号は忘れて，一般的な状況を考えよう．G を複素数体 $\mathbb{C}$ 上の連結な簡約代数群とし，ベクトル空間 V に線型に作用しているとする．つまり V は G の有限次元表現である．この作用に関する圏論的商を $\pi : V \to V/\!/G = \operatorname{Spec}\mathbb{C}[V]^G$ と書き，

$$\mathcal{N}_V := \pi^{-1}(\pi(0)) = \{v \in V \mid f(v) = 0 \ \ (f \in \mathbb{C}[V]^G_+)\} = \{v \in V \mid \overline{Gv} \ni 0\}$$

を冪零錐とする．ここで，$\mathbb{C}[V]_+ = \{f \in \mathbb{C}[V] \mid f(0) = 0\}$ は定数項のない多項式全体を表している．

任意の一径数部分群 (1-PSG) $\lambda : \mathbb{C}^\times \to G$, に対して[6],

$$V(\lambda) := \{v \in V \mid \lim_{t\to 0} \lambda(t)v = 0 \ \ (\text{極限が存在して } 0)\}$$

とおく．この一径数分群を用いて冪零元を特徴付けることができる．

補題 3.1 (Hilbert-Mumford の基準). $v \in V$ に対して，$v \in \mathcal{N}_V$ であることと，ある一径数部分群 λ が存在して，$v \in V(\lambda)$ となることは同値である．

さて，$T \subset G$ を極大トーラスとして $X^*(T)$ を T の指標群とする．また T の一径数部分群 $\lambda : \mathbb{C}^\times \to T$ の集合を $X_*(T)$ と書く．すると，$(\lambda, \gamma) \in X_*(T) \times X^*(T)$ に対して，$\gamma \circ \lambda : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times$ は代数群の自己準同型なので，$\gamma(\lambda(t)) = t^m$ $(t \in \mathbb{C}^\times)$ となるような整数 m がただ一つ定まる．これを $m = \langle \lambda, \gamma \rangle$ のように表す．

V のウェイト空間分解を

$$V = \bigoplus\nolimits_{\gamma \in X^*(T)} V_\gamma, \qquad V_\gamma := \{v \in V \mid tv = \gamma(t)v \ \ (t \in T)\}$$

とすると，1-PSG $\lambda : \mathbb{C}^\times \to T \subset G$ に対して，

$$V(\lambda) = \bigoplus\nolimits_{\langle \lambda, \gamma \rangle > 0} V_\gamma$$

であることが容易にわかる．G の任意の 1-PSG は $\lambda \in X_*(T)$ と G 共役であるから，Hilbert-Mumford の基準 (補題 3.1) と合わせて考えると

$$\mathcal{N}_V = \bigcup\nolimits_{\lambda \in X_*(T)} G \cdot V(\lambda)$$

[6] 紛らわしい用語ではあるが，一径数部分群とは代数群 $\mathbb{C}^\times$ から G への準同型をさす．

であることが分かる．この表示において $V(\lambda) \neq 0$ となるような $V(\lambda)$ は有限個しかないので，冪零錐 $\mathcal{N}_V$ の既約成分に寄与するのは，包含関係において極大な $V(\lambda)$ のみである．このような $U = V(\lambda)$ を極大不安定部分空間と呼び，

$$\mathcal{X}_U := \{\gamma \in X^*(T) \mid V_\gamma \subset U\} = \{\gamma \mid \langle \lambda, \gamma \rangle > 0\}$$

をウェイトの極大不安定集合と呼ぶ．Weyl 群 $W_G(T)$ による共役を除いて得られたウェイトの極大不安定集合の全体を $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_s$ とし，$U_i = \bigoplus_{\gamma \in \mathcal{X}_i} V_\gamma$ $(1 \leq i \leq s)$ とおく．U_i はその構成から極大不安定部分空間であり，$U_i \subset \mathcal{N}_V$ を満たしている．

一般に，1-PSG λ に対して

$$P(\lambda) := \{g \in G \mid \text{ the limit } \lim_{t \to 0} \mathrm{Ad}(\lambda(t))\, g \text{ exists}\}$$

とおくと，$P(\lambda)$ は放物型部分群であって ([Kem78])，$V(\lambda)$ を安定にする．そこで $U = V(\lambda)$ を極大不安定部分空間とすると，その安定化部分群 $\mathrm{Stab}_G(U)$ は $P(\lambda)$ を含み，したがって，それ自身放物型部分群である．

この事実を踏まえた上で，$P_i := \mathrm{Stab}_G(U_i)$ $(1 \leq i \leq s)$ とおくと，P_i は放物型部分群であり，自然な射影 $G \times_{P_i} U_i \to C_i \subset \mathcal{N}_V$ による像 $C_i = G \cdot U_i$ は既約な閉部分多様体である[7]．以上から，冪零錐 $\mathcal{N}_V$ の既約成分を $C_1, \ldots, C_s$ の中から選ぶことができることがわかる．これらの中には重複しているものもあるかもしれないが，必要なら順序を付け替えることによって，冪零錐の既約分解

$$\mathcal{N}_V = \bigcup_{k=1}^{r} C_k \tag{3.1}$$

を得る．

3.2. **拡張冪零錐の既約成分．** 前節 § 3.1 で得られた一般論を拡張随伴表現に適用してみよう．そこで $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ とし，$W = \mathrm{M}_{n,p} \oplus \mathrm{M}_{q,n} \oplus \mathrm{M}_n$ を拡張随伴表現とする．W のウェイト全体は，標準的な記号を用いると

$$\Lambda = \Lambda(W) := \{0\} \cup \Delta_n \cup \{\pm\varepsilon_i \mid 1 \leq i \leq n\}, \quad \Delta_n = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid 1 \leq i \neq j \leq n\}$$

と書ける．ここで Δ_n は $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ のルート系 (A_{n-1} 型) であって，対角的なカルタン部分環 (極大トーラスのリー環) $\mathfrak{t}$ の双対空間における標準的な基底を $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^n \subset \mathfrak{t}^*$ と書いた．

ルート $\alpha \in \Delta_n$ の重複度は 1 であるが，$\alpha = 0$ の重複度は n，ε_i の重複度は p，そして $-\varepsilon_i$ の重複度は q であることに注意しよう．標準的な正ルート系を $\Delta_n^+ = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq n\} \subset \Delta_n$ と取ると，ウェイトの極大安定部分集合の Weyl 群作用による代表系は次のように与えられる．

補題 3.2. $0 \leq k \leq n$ に対して，$X_k := \Delta_n^+ \cup \{\varepsilon_i \mid 1 \leq i \leq k\} \cup \{-\varepsilon_j \mid k < j \leq n\}$ とおくと，$X_0, X_1, \ldots, X_n$ がウェイトの極大安定部分集合の Weyl 群作用による完全代表系を与える．

[7] G/P_i が射影多様体であることの帰結．

X_k を補題で与えられたウェイトの極大不安定集合とし，$U_k \subset W$ を対応する極大不安定部分空間とする．つまり

$$U_k = \bigoplus_{\alpha \in X_k} W_\alpha = \{(\xi, \eta, v) \in \mathrm{M}_{n,p} \oplus \mathrm{M}_{q,n} \oplus \mathrm{M}_n \mid \\ \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ 0 \end{pmatrix} (\xi_1 \in \mathrm{M}_{k,p}),\ \eta = (0, \eta_2)\ (\eta_2 \in \mathrm{M}_{q,n-k}),\ v \in \mathfrak{n}^+\}, \tag{3.2}$$

である．ただし，$\mathfrak{n}^+$ は上半三角行列からなる極大べき零部分環 (Borel 部分代数の冪零根基) を表す．この U_k の安定化部分群 $P_k = \mathrm{Stab}_G(U_k)$ は簡単な計算により Borel 部分群 B に一致することが確かめられる．そこで $\psi_k : G \times_B U_k \to C_k \subset \mathfrak{N}(W)$ を自然な射影とすると，$C_k = G \cdot U_k$ は冪零錐 $\mathfrak{N}(W)$ の閉既約部分多様体である．

次の定理が冪零錐に関する主定理である．

定理 3.3. $\mathfrak{N}(W)$ を冪零錐，$C_k = G \cdot U_k \subset \mathfrak{N}(W)$ $(0 \le k \le n)$ とおく．

(1) C_k は冪零錐 $\mathfrak{N}(W)$ の既約成分であって，$\psi_k : G \times_B U_k \to C_k$ は C_k の特異点解消，その次元は $\dim C_k = (n^2 - n) + pk + q(n-k)$ で与えられる．

(2) 冪零錐は $\mathfrak{N}(W) = \cup_{k=0}^{n} C_k$ と既約分解される．したがって，既約成分の個数は $(n+1)$ 個で，$p, q \ge 1$ によらない．また，$\dim \mathfrak{N}(W) = n^2 - n + n \cdot \max\{p, q\}$ である．

(3) 冪零錐 $\mathfrak{N}(W)$ は $p = q$ のとき，そのときにかぎり等次元多様体であって，そのとき，$\dim \mathfrak{N}(W) = n^2 - n + pn$ である．

(4) $p = q = 1$ のとき，$\dim \mathfrak{N}(W) = n^2$ であって，このとき，商写像の任意のファイバー $\pi_W^{-1}((\tau; \Gamma))$ $((\tau; \Gamma) \in \mathrm{Im}\, \pi_W)$ の次元は n^2 である．

4. 課題と問題

最後に，拡張随伴軌道に関して，将来に向けた課題と問題を挙げておく．

問題 4.1. (1) 冪零軌道 $\mathfrak{N}(W)/G$ を分類せよ．あるいはもっと一般に，拡張随伴軌道 W/G を分類して，よいパラメータ付けを与えよ．

(2) 軌道の閉包関係やジョルダン分解，正則軌道 (次元が最大の軌道) の分類を与えよ．

(3) 閉軌道の交差コホモロジー，ポアンカレ多項式などを計算せよ．

References

[CM93] David H. Collingwood and William M. McGovern, *Nilpotent orbits in semisimple Lie algebras*, Van Nostrand Reinhold Mathematics Series, Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1993.

[Ito13] Minoru Itoh, *Cayley-Hamilton type theorems and invariant theory*, Proceedings of the Symposium on Representation Theory (PSRT), 2013, in Japanese, pp. 16–21.

[Kem78] George R. Kempf, *Instability in invariant theory*, Ann. of Math. (2) **108** (1978), no. 2, 299–316.

[KW06] Hanspeter Kraft and Nolan R. Wallach, *On the nullcone of representations of reductive groups*, Pacific J. Math. **224** (2006), no. 1, 119–139.

[LBP87] Lieven Le Bruyn and Claudio Procesi, *Étale local structure of matrix invariants and concomitants*, Algebraic groups Utrecht 1986, Lecture Notes in Math., vol. 1271, Springer, Berlin, 1987, pp. 143–175.

[LBP90] ———, *Semisimple representations of quivers*, Trans. Amer. Math. Soc. **317** (1990), no. 2, 585–598.

[NO17] Kyo Nishiyama and Takuya Ohta, *Enhanced adjoint action and their orbits for the general linear group*, arXiv preprint, `arXiv:1703.08641` (2017).

[Pop03] V. L. Popov, *The cone of Hilbert null forms*, Tr. Mat. Inst. Steklova **241** (2003), no. Teor. Chisel, Algebra i Algebr. Geom., 192–209.

[Pro76] C. Procesi, *The invariant theory of $n \times n$ matrices*, Advances in Math. **19** (1976), no. 3, 306–381.

[Sch78] Gerald W. Schwarz, *Representations of simple Lie groups with regular rings of invariants*, Invent. Math. **49** (1978), no. 2, 167–191.

[Sch14] ———, *Lifting automorphisms of quotients of adjoint representations*, J. Lie Theory **24** (2014), no. 3, 625–639.

[Wey39] Hermann Weyl, *The Classical Groups. Their Invariants and Representations*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1939.

[太西 15] 太田琢也 and 西山享, 代数群と軌道, 数学の杜, no. 3, 数学書房, 2015.

[堀 16] 堀田良之, 線型代数群の基礎, 朝倉数学大系 / 砂田利一, 堀田良之, 増田久弥編集, no. 12, 朝倉書店, 2016.

Depertment of Mathematics, Tokyo Denki University, Senju-asahi-cho 5, Adachi-ku,Tokyo 120-8551, Japan

E-mail address: `ohta@cck.dendai.ac.jp`

Department of Physics and Mathematics, Aoyama Gakuin University, Fuchinobe 5-10-1, Sagamihara 252-5258, Japan

E-mail address: `kyo@gem.aoyama.ac.jp`